6.1.7 Řešení rovnic a jejich soustav v komplexním oboru II

Předpoklady: 2715, 6105, 6106

Nejdříve opakování z druháku.

Př. 1: Vyřeš rovnici $a+\sqrt{a^2+3}=3$ s reálnou proměnnou a.

$a+\sqrt{a^2+3}=3 \quad /-a$
$\sqrt{a^2+3}=3-a \quad /^2$
$\left(\sqrt{a^2+3}\right)^2=(3-a)^2$
$a^2+3=9-6a+a^2$
$6a=6$
$a=1$
Zkouška: $L=a+\sqrt{a^2+3}=1+\sqrt{1^2+3}=3$
$P=3$
$L=P \Rightarrow K=\{1\}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad dávám jako připomenutí (často na známky) jedné z největších bolestí – správného umocňování rovnic.

Př. 2: Řeš rovnici: $z+|z|=2+i$.

$z+|z|=2+i$
z a $|z|$ jsou úplně jiná čísla: z je komplexní číslo, $|z|$ je reálné $\Rightarrow$ nemůžeme s nimi pracovat stejně $\Rightarrow$ musíme to zařídit tak, aby v rovnici existoval pouze jeden druh čísla $\Rightarrow$ z a $|z|$ napíšeme pomocí reálné a imaginární části: $z=a+bi$, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
$z+|z|=2+i \Rightarrow a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+i$
Rozdělíme rovnici na reálnou a imaginární část.

$bi=i \Rightarrow b=1$

$a+\sqrt{a^2+b^2}=2$, dosadíme $b=1$
$a+\sqrt{a^2+1^2}=2$
$\sqrt{a^2+1}=2-a \quad /^2$
$a^2+1=4-4a+a^2$
$4a=3$
$a=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow z=\frac{3}{4}+i$
Musíme udělat zkoušku, protože jsme umocňovali.

$L = z + |z| = \frac{3}{4} + i + \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{3}{4} + i + \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{3}{4} + i + \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{3}{4} + i + \frac{5}{4} = 2 + i$

$P = 2 + i$

$L = P \Rightarrow \qquad K = \left\{\frac{3}{4} + i\right\}$

Pedagogická poznámka: Určitě se objeví špatné řešení, které kopíruje řešení rovnic s absolutní hodnotou v reálném oboru a rozděluje komplexní čísla na dva intervaly. O takovém řešení je třeba diskutovat s celou třídou a dojít ke dvěma základním důvodům, které ukazují jeho nesprávnost.
Komplexní čísla není možné seřadit podle velikosti $\Rightarrow$ nemůžeme je pomocí nerovností $z \geq 0$ a $z < 0$ (které pro ně nemají smysl) rozdělit do dvou množin.
Nahrazení $|z| = z$ (případně $|z| = -z$) zcela popírá význam absolutní hodnoty, protože pro všechna imaginární komplexní čísla nevytváří reálný výsledek (platilo by $|2+i| = 2+i$).

Př. 3: Řeš rovnici: $2(z+i) + i|z| = 2 + i$.

Upravíme: $2z + 2i + i|z| = 2 + i$

$2z + i|z| = 2 - i$

Stejný fígl jako předtím $z = a + bi$.

$2(a+bi) + i\sqrt{a^2+b^2} = 2 - i$

$2a + i \cdot 2b + i\sqrt{a^2+b^2} = 2 - i$

Rozdělíme rovnici na reálnou a imaginární část.

$2a = 2 \Rightarrow a = 1$

$2b + \sqrt{a^2+b^2} = -1$, dosadíme $a = 1$

$\sqrt{1+b^2} = -1 - 2b \quad /^2$

$1 + b^2 = 1 + 4b + 4b^2$

$0 = 4b + 3b^2$

$b(3b+4) = 0$

$b_1 = 0 \qquad b_2 = -\frac{4}{3}$

Při řešení jsme umocňovali $\Rightarrow$ musíme provést zkoušku, stačí v rovnici pro imaginární části těsně před umocněním.

$b_1 = 0$

$L: \sqrt{1+b^2} = \sqrt{1+0^2} = 1$

$P: -1 - 2b = -1 - 2 \cdot 0 = -1$

$L \neq P$

$b_2 = -\frac{4}{3}$

$L: \sqrt{1+b^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

$P: -1 - 2b = -1 - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{3}$

$L = P$

$\Rightarrow$ jediné řešení $z = 1 - \frac{4}{3}i$ $\quad$ $K = \left\{1 - \frac{4}{3}i\right\}$

Pedagogická poznámka: Je dobré se zmínit o tom, kdy je nejvýhodnější provést rozepsání $z = a + bi$ a, ve kterém místě provést zkoušku.

Pokud se objeví žák, který bude rovnici $\sqrt{1+b^2} = -1 - 2b$ považovat za neřešitelnou (na pravé straně je přece samé mínus), je třeba zkontrolovat, zda spočítal zkoušku.

Př. 4: Řeš rovnici: $|z+1| + z = 3 - 2i$.

Stejný fígl jako předtím $z = a + bi$.

$|a+bi+1| + a + bi = 3 - 2i$

$\sqrt{(a+1)^2 + b^2} + a + bi = 3 - 2i$

Rozdělíme rovnici na reálnou a imaginární část.

$bi = -2i \Rightarrow b = -2$

$\sqrt{(a+1)^2 + b^2} + a = 3$, dosadíme $b = -2$

$\sqrt{(a+1)^2 + (-2)^2} + a = 3$

$\sqrt{(a+1)^2 + 4} = 3 - a \quad /^2$

$(a+1)^2 + 4 = (3-a)^2$

$a^2 + 2a + 1 + 4 = 9 - 6a + a^2$

$8a = 4$

$a = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow z = \frac{1}{2} - 2i$

Zkoušku dělat nemusíme, když si uvědomíme, že při umocňování byly obě strany rovnice kladné. $\Rightarrow K = \left\{\frac{1}{2} - 2i\right\}$

Pedagogická poznámka: U předchozí rovnice je hlavním problémem dosazení do vzorce pro absolutní hodnotu.

Př. 5: Vyřeš rovnici $iz(z+1) + 4i - 1 = (z - 2i)(iz - 3)$.

Rovnice neobsahuje absolutní hodnotu $\Rightarrow$ postupujeme stejně jako v minulé hodině klasickým postupem pro řešení lineárních rovnic.

$iz^2 + iz + 4i - 1 = iz^2 - 3z - 2i^2 z + 6i$

$iz^2 + iz + 4i - 1 = iz^2 - 3z + 2z + 6i$

$z + iz = 1 + 2i$

$z = \frac{1+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1 - i + 2i - 2i^2}{1+1} = \frac{3+i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$ $\quad$ $K = \left\{\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right\}$

Pedagogická poznámka: Zařazení klasické lineární rovnice na tomto místě považuji za téměř nutné. Žákovská tendence přebíjet staré poznatky novými vede k tomu, že zcela automaticky začnou dosazovat (i když si tím výpočet prodlužují) $z = a + bi$.

Př. 6: Vyřeš rovnici: $z + 2\overline{z} = 3 + 2i$.

Podobný problém i podobné řešení jako v předchozích příkladech.

$z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$

$z + 2\overline{z} = 3 + 2i$

$a + bi + 2(a - bi) = 3 + 2i$

$a + bi + 2a - 2bi = 3 + 2i$

$3a - bi = 3 + 2i$

$bi = -2i \Rightarrow b = -2$ $\qquad$ $3a = 3 \Rightarrow a = 1$

$z = 1 - 2i$ $\qquad$ $K = \{1 - 2i\}$

Př. 7: Vyřeš rovnici: $z + 2 + \overline{z + i} = 2(z + 1 + i)$.

Nejdříve rovnici upravíme.

$z + 2 + \overline{z + i} = 2z + 2 + 2i$

$\overline{z + i} = z + 2i$

Rozepíšeme: $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$.

$a - bi - i = a + bi + 2i$

$-3i = 2bi$

$b = -\frac{3}{2}$

Rovnice omezuje pouze volbu imaginární části komplexního čísla $z \Rightarrow$ reálná část může mít libovolnou hodnotu $\Rightarrow$ $z = a - \frac{3}{2}i$ $\qquad$ $K = \left\{a - \frac{3}{2}i; a \in R\right\}$

Pedagogická poznámka: Při řešení se pozná, kteří žáci si pamatují, co vlastně dělají. Pokud ne, objeví se jako výsledek $K = \left\{-\frac{3}{2}i\right\}$ nebo dokonce $K = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Př. 8: Petáková:
strana 139/cvičení 55 c) d)
strana 139/cvičení 53 c) d)

Shrnutí: Při řešení rovnic obsahujících absolutní hodnotu nebo komplexně sdružené číslo použijeme dosazení $z = a + bi$ a rozdělení rovnice na reálnou a imaginární část.